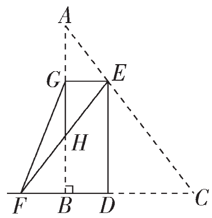
(3) $\triangle GEF$ 面积的最大值为 6，此时 $CD=3$. 如图(2)，$\because BC=6, AC=10$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=8$.

由(1)知，四边形 $BDEG$ 是矩形，

设 $GE=x$，

$\therefore BD=x, DE/\!/AB$，



图(2)

$\therefore CD=6-x, \triangle CDE \backsim \triangle CBA, \therefore \dfrac{CD}{DE}=\dfrac{CB}{BA}$，

$\therefore \dfrac{6-x}{DE}=\dfrac{6}{8}, \therefore DE=\dfrac{4}{3}(6-x)$，

$\therefore S_{\triangle GEF}=\dfrac{1}{2}x\times\dfrac{4}{3}(6-x)=-\dfrac{2}{3}(x-3)^2+6$，

$\therefore$ 当 $x=3$ 时，$S_{\triangle GEF}$ 有最大值，最大值为 6，

此时 $CD=6-3=3$.

15.【解】(1) $\because \angle ACB=90°, \therefore \angle A+\angle B=90°$.

$\because CD\perp AB, \therefore \angle ADC=90°, \therefore \angle A+\angle ACD=90°$，

$\therefore \angle B=\angle ACD$.

$\because \angle A=\angle A, \therefore \triangle ABC\backsim\triangle ACD$，

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{AD}, \therefore AC^2=AD\cdot AB$. 故答案为 $\angle ACD, \dfrac{AC}{AD}$.

(2) $\triangle AEB$ 是直角三角形. 理由如下：

$\because \angle ACE=\angle AFC, \angle CAE=\angle FAC$，

$\therefore \triangle ACF\backsim\triangle AEC, \therefore \dfrac{AC}{AF}=\dfrac{AE}{AC}$，

$\therefore AC^2=AF\cdot AE$. 由(1)得 $AC^2=AD\cdot AB$，

$\therefore AF\cdot AE=AD\cdot AB, \therefore \dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AD}{AE}$.

$\because \angle FAD=\angle BAE, \therefore \triangle AFD\backsim\triangle ABE$，

$\therefore \angle ADF=\angle AEB=90°, \therefore \triangle AEB$ 是直角三角形.

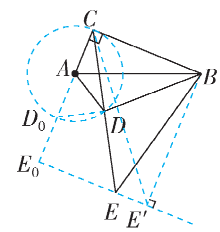
(3) $\because \angle CEB=\angle CBD, \angle ECB=\angle BCD$，

$\therefore \triangle CEB\backsim\triangle CBD, \therefore \dfrac{CE}{CB}=\dfrac{CB}{CD}$，

$\therefore CD\cdot CE=CB^2=(2\sqrt{6})^2=24$.

如图，以点 A 为圆心，2 为半径作 $\odot A$，则 C, D 都在 $\odot A$ 上，延长 CA 到 E_0，使 $CE_0=6$，交 $\odot A$ 于 D_0，连接 E_0E, D_0D，则 $CD_0=4$. $\because CD_0$ 为 $\odot A$ 的直径，

$\therefore \angle CDD_0=90°$. $\because CD_0\cdot CE_0=24=CD\cdot CE$，



$\therefore \dfrac{CD_0}{CE}=\dfrac{CD}{CE_0}$. $\because \angle ECE_0=\angle D_0CD$，

$\therefore \triangle ECE_0\backsim\triangle D_0CD, \therefore \angle CDD_0=\angle CE_0E=90°$，

$\therefore$ 点 E 在过点 E_0 且与 CE_0 垂直的直线上运动. 过点 B 作 $BE'\perp E_0E$，交 E_0E 的延长线于点 E'，连接 CE'. $\because$ 垂线段最短，$\therefore$ 当点 E 在点 E' 处时，BE 最短，即线段 BE 长度的最小值为 BE' 的长.

$\because \angle CE_0E'=\angle E_0CB=\angle BE'E_0=90°$，

$\therefore$ 四边形 $CE_0E'B$ 是矩形，$\therefore BE'=CE_0=6, \angle CBE'=90°$.

在 Rt$\triangle CBE'$ 中，根据勾股定理得 $CE'=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+6^2}=2\sqrt{15}$，

即当线段 BE 的长度取得最小值时，线段 CE 的长为 $2\sqrt{15}$.

第五章　四边形

A 湖南真题诊断练

刷 诊断

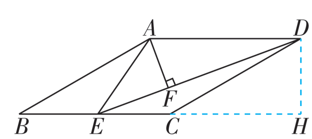
1. C　【解析】在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 互相垂直平分，$\therefore AB=AD, CB=CD, BA=BC, \therefore BC=CD=DA=AB$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形. $\because AB=3$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长为 $3\times4=12$. 故选 C.

易错警示

菱形判定的易错点

判定条件	结论	原因
对角线互相垂直且平分的四边形	是菱形	垂直+平分同时满足，符合菱形的判定定理
仅对角线互相垂直的四边形	不一定是菱形	缺少平分条件，可能只是一般四边形
对角线互相垂直的平行四边形	是菱形	符合菱形的判定定理

2. C　【解析】如图，过 D 作 $DH\perp BC$ 交 BC 的延长线于 H. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$AB=6$，$\therefore AB/\!/CD, AB=CD=AD=6, AD/\!/BC$，$\therefore \angle DCH=\angle B=30°$，$\angle ADF=\angle DEH$，$\therefore DH=\dfrac{1}{2}CD=3$. $\because AF\perp DE$，



$\therefore \angle AFD=\angle EHD=90°$，$\therefore \triangle ADF\backsim\triangle DEH$，$\therefore \dfrac{AD}{DE}=\dfrac{AF}{DH}$，

$\therefore \dfrac{6}{x}=\dfrac{y}{3}, \therefore y=\dfrac{18}{x}$，故选 C.

3. 205　【解析】$\because$ 五边形 $ABCDE$ 的内角和为 $180°\times(5-2)=540°$，$\therefore \angle A+\angle E=540°-\angle B-\angle C-\angle D=540°-120°-110°-105°=205°$，故答案为 205.

刷有所得

多边形的知识总结

内角和	n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot180°(n\geqslant3)$
外角和	n 边形的外角和为 $360°(n\geqslant3)$
对角线	当 $n>3$ 时，n 边形有 $\dfrac{n(n-3)}{2}$ 条对角线

4. 45 【解析】∵ 八边形 $ABCDEFGH$ 是正八边形，∴ $\angle ABC=\angle BCD=\frac{180°\times(8-2)}{8}=135°$，$AB=BC=CD$，∴ $\angle BCA=\angle BAC=\frac{180°-\angle ABC}{2}=22.5°$，同理可得 $\angle CBD=22.5°$，

∴ $\angle AMB=\angle CBD+\angle BCA=45°$，故答案为 45.

5.【解】(1) 选择①.

证明：∵ $\angle B=\angle AED$，∴ $DE//CB$.

∵ $AB//CD$，

∴ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形.

选择②.

证明：∵ $AE=BE$，$AE=CD$，∴ $CD=BE$.

∵ $AB//CD$，

∴ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形.

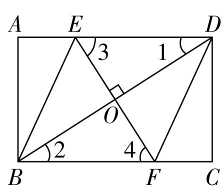
(选择其中一组进行证明即可)

(2) 由 (1) 得 $DE=BC=10$.

∵ $AD\perp AB$，$AD=8$，

∴ 在 Rt$\triangle ADE$ 中，$AE=\sqrt{DE^2-AD^2}=6$.

6.【证明】(1) 如图所示.



∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD//BC$，∴ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

∵ O 是 BD 的中点，∴ $BO=DO$.

在 $\triangle BOF$ 与 $\triangle DOE$ 中，

$$\begin{cases}\angle 2=\angle 1,\\ \angle 4=\angle 3,\\ BO=DO,\end{cases}$$ ∴ $\triangle BOF\cong\triangle DOE$ (AAS).

(2) ∵ $\triangle BOF\cong\triangle DOE$，∴ $ED=BF$.

又∵ $ED//BF$，∴ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

∵ $EF\perp BD$，∴ 平行四边形 $EBFD$ 是菱形.

7. (1)【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=90°$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

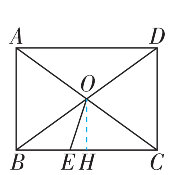
∴ $AC=BD$.

(2)【解】如图，过点 O 作 $OH\perp BC$ 于点 H，则 $\angle OHE=\angle OHC=90°$.

∵ $\angle ABC=90°$，$AB=6$，$BC=8$，

∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∴ $OC=OA=\frac{1}{2}AC=5$.



∵ $\angle CEO=\angle COE$，

∴ $CE=OC=5$.

∵ $OC=OA=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，且 $AC=BD$，

∴ $OC=OB$，

∴ $HC=HB=\frac{1}{2}BC=4$，

∴ $EH=CE-HC=5-4=1$.

∵ $\frac{OH}{HC}=\frac{AB}{BC}=\tan\angle ACB$，

∴ $OH=\frac{AB}{BC}\cdot HC=\frac{6}{8}\times 4=3$，

∴ $\tan\angle CEO=\frac{OH}{EH}=\frac{3}{1}=3$，

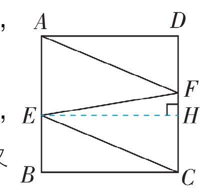
∴ CE 的长为 5，$\tan\angle CEO$ 的值为 3.

8. (1)【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AB//CD$ 且 $AB=CD$.

∵ $BE=DF$，∴ $AB-BE=CD-DF$，∴ $AE=CF$.

又∵ $AE//CF$，∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

(2)【解】过点 E 作 $EH\perp CD$ 于点 H，如图.



∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$BC=12$，

∴ $CD=BC=12$，$\angle B=\angle BCD=90°$. 又 ∵ $\angle EHC=90°$，∴ 四边形 $EBCH$ 是矩形，

∴ $EB=HC=5$，$EH=BC=12$.

∵ $DF=BE=5$，∴ $HF=CD-DF-CH=12-5-5=2$.

在 Rt $\triangle EHF$ 中，由勾股定理得 $EF=\sqrt{EH^2+FH^2}=\sqrt{12^2+2^2}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$.

9. (1)【解】∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB//CD$，$\angle A=\angle C$.

∵ 直线 $l\perp CD$，即 $BE\perp CD$，∴ $\angle BEC=\angle BED=90°$，

∴ $\angle CBE+\angle C=90°$.

由题意得，$\angle ABF=\angle CBE$，∴ $\angle A+\angle ABF=\angle C+\angle CBE=90°$，故答案为 90.

【证明】(2) 由 (1) 知，$\angle BEC=\angle BED=90°$，$AB//DC$，

∴ $\angle ABE=\angle BEC=90°$.

由题意得，$\triangle BEC\cong\triangle BE_1C_1$，∴ $BE=BE_1$，$EC=E_1C_1$，$\angle BEC=\angle BE_1C_1=90°$，∴ $\triangle BEE_1$ 是等腰直角三角形，

∴ $\angle BEE_1=\angle BE_1E=45°$，∴ $\angle CEN=180°-\angle BEE_1-\angle BEC=180°-45°-90°=45°$.

∵ 直线 $CN\perp CD$，即 $\angle ECN=90°$，∴ $\triangle ECN$ 为等腰直角三角形，

∴ $\angle CNE=\angle CEN=45°$，∴ $CE=CN$，∴ $CN=C_1E_1$.

∵ $\angle BE_1C_1=90°$，点 E_1 在线段 AB 上，∴ $AB\perp C_1E_1$.

∵ $AB//CD$，$CN\perp CD$，∴ $C_1E_1//CN$，∴ $\angle C_1E_1M=\angle CNM$.

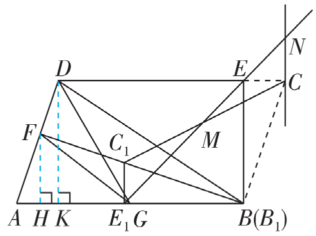
∵ $\angle C_1ME_1=\angle CMN$，$CN=C_1E_1$，∴ $\triangle CNM\cong\triangle C_1E_1M$ (AAS).

(3) ∵ $\angle A+\angle ABF=90°$，∴ $BF\perp AD$. ∵ $AB=2AD=2\sqrt{7}AF$，

∴ 设 $AF=a$，则 $AD=BC=BC_1=\sqrt{7}a$，$AB=2\sqrt{7}a$.

在 Rt△ABF 中，$\sin\angle ABF=\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{a}{2\sqrt{7}a}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，$BF=\sqrt{AB^2-AF^2}=\sqrt{(2\sqrt{7}a)^2-a^2}=3\sqrt{3}a$.

如图所示，过点 F 作 $FH\perp AB$ 于点 H，过点 D 作 $DK\perp AB$ 于点 K，



$\therefore$ FH // DK，$\sin\angle HBF=\sin\angle ABF=\dfrac{FH}{BF}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，即$\dfrac{FH}{3\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，解得 $FH=\dfrac{3\sqrt{21}a}{14}$.

$\because$ $\angle A+\angle ABF=90°=\angle A+\angle AFH$，$\therefore$ $\angle AFH=\angle ABF$，

$\therefore$ $\sin\angle AFH=\sin\angle ABF=\dfrac{AH}{AF}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，即$\dfrac{AH}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，解得 $AH=\dfrac{\sqrt{7}a}{14}$.

$\because$ $FH//DK$，$\therefore$ $\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{FH}{DK}=\dfrac{AH}{AK}$，即$\dfrac{a}{\sqrt{7}a}=\dfrac{\frac{3\sqrt{21}a}{14}}{DK}=\dfrac{\frac{\sqrt{7}a}{14}}{AK}$，解得 $DK=\dfrac{3\sqrt{3}a}{2}$，$AK=\dfrac{a}{2}$.

$\because$ $DK\perp AB$，$\angle AGD=60°$，$\therefore$ $\tan\angle AGD=\tan 60°=\dfrac{DK}{KG}=\sqrt{3}$，

$\therefore$ $KG=\dfrac{DK}{\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3a}{2}$，

$\therefore$ $AG=AK+KG=\dfrac{a}{2}+\dfrac{3a}{2}=2a$.

$\because$ $\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{a}{\sqrt{7}a}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，$\dfrac{AG}{AB}=\dfrac{2a}{2\sqrt{7}a}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，$\therefore$ $\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AG}{AB}$.

$\because$ $\angle A=\angle A$，$\therefore$ $\triangle AFG\backsim\triangle ADB$，

$\therefore$ $\angle AFG=\angle ADB$，$\therefore$ $FG//BD$.

B 考点突破练

考点 25　多边形与平行四边形

刷基础

1. C　【解析】设这个多边形的边数为 n. 根据题意得，$\dfrac{1}{4}(n-2)\cdot180°=360°$，解得 $n=10$，故选 C.

2. 18°　【解析】$\because$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形，$\therefore$ $\angle CDF=\dfrac{360°}{5}=72°$. $\because$ $CF\perp ED$，$\therefore$ $\angle CFD=90°$，$\therefore$ $\angle DCF=180°-90°-72°=18°$，故答案为 18°.

3. 540　【解析】从某个多边形的一个顶点出发的对角线共有 2 条，则这 2 条对角线将多边形分割为 3 个三角形，所以该多边形的内角和是 $3\times180°=540°$，故答案为 540.

4. 12°　【解析】$\because$ 正五边形的每个内角的度数为$\dfrac{1}{5}\times(5-2)\times180°=108°$，正六边形的每个内角的度数为$\dfrac{1}{6}\times(6-2)\times180°=120°$，$\therefore$ $\angle AOB=360°-108°-120°\times2=12°$，故答案为 12°.

5. C　【解析】A 选项，添加 $AB=BC$ 无法证明四边形 $ABCD$ 为平行四边形，不符合题意；B 选项，添加 $OA=OB$ 无法证明四边形 $ABCD$ 为平行四边形，不符合题意；C 选项，因为 $AD//BC$，$AD=BC$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形，符合题意；D 选项，添加 $AC\perp BD$ 无法证明四边形 $ABCD$ 为平行四边形，不符合题意. 故选 C.

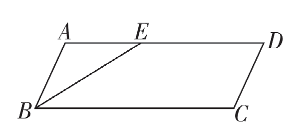
6. D　【解析】$\because$ 点 D,E,F 分别是△ABC 的边 AB,BC,CA 的中点，$\therefore$ $DE//AC$，$DE=\dfrac{1}{2}AC$，$EF//AB$，$EF=\dfrac{1}{2}AB$，$DF//BC$，$DF=\dfrac{1}{2}BC$，$\therefore$ 四边形 $ADEF$、四边形 $BDFE$、四边形 $DECF$ 都为平行四边形，故①正确；$\therefore$ 题图中的四个小三角形为全等三角形，即形状和大小完全一样，故②正确；$\because$ 四边形 $ADEF$ 为平行四边形，$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 的周长为 $2AD+2AF=AB+AC$，故③正确；$\because$ 点 D,F 分别是边 AB,CA 的中点，$\therefore$ $AB=2AD$，$AC=2AF$，$\therefore$ $AD\cdot AC=AD\cdot(2AF)=2AD\cdot AF=AB\cdot AF$，故④正确. 综上所述，正确的是①②③④. 故选 D.

7. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore$ $OA=OC$，$OB=OD$. $\because$ E,F 分别是 OA,OC 的中点，$\therefore$ $OE=\dfrac{1}{2}OA$，$OF=\dfrac{1}{2}OC$，$\therefore$ $OE=OF$，$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

(2)【解】$\because$ 点 E 是 OA 的中点，$\therefore$ $S_{\triangle AOD}=2S_{\triangle DOE}$，$S_{\triangle AOB}=2S_{\triangle BOE}$，同理得 $S_{\triangle COD}=2S_{\triangle DOF}$，$S_{\triangle BOC}=2S_{\triangle BOF}$. $\because$ $S_{\square DEBF}=S_{\triangle DOE}+S_{\triangle BOE}+S_{\triangle DOF}+S_{\triangle BOF}$，$S_{\square ABCD}=S_{\triangle AOD}+S_{\triangle AOB}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle BOC}$，$\therefore$ $S_{\square ABCD}=2S_{\square DEBF}=2\times2=4$.

刷易错

8. D　【解析】如图所示，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore$ $AD=BC$，$AB=CD$，$AD//BC$，$\therefore$ $\angle AEB=\angle CBE$. $\because$ BE 是 $\angle ABC$ 的平分线，$\therefore$ $\angle ABE=\angle CBE$，$\therefore$ $\angle ABE=\angle AEB$，$\therefore$ $AB=AE$. 若 $AE=4$，$DE=5$，则$\square ABCD$ 的周长为 $2\times(4+9)=26$；若 $AE=5$，$DE=4$，则$\square ABCD$ 的周长为 $2\times(5+9)=28$. 故$\square ABCD$ 的周长为 26 或 28.

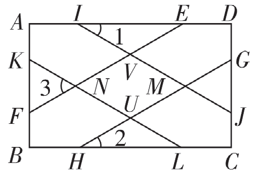


易错警示

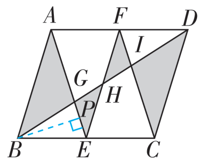
解决几何问题时，如果题目中未明确给出图形，要考虑所有可能发生的情况，画出图形求解.

刷 提升

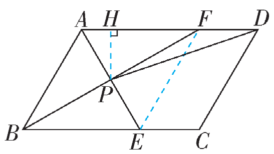
1. D 【解析】如图，∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle D=\angle C=90°$. ∵ $\angle 1=\angle 2=30°$，∴ $\angle HGC=\angle IJD=60°$，∴ $\angle GMJ=60°$. ∵ $IJ/\!/KL$，$EF/\!/GH$，∴ 四边形 $NUMV$ 是平行四边形，∴ $\angle VNU=\angle VMU=\angle GMJ=60°$，∴ $\angle 3=\angle VNU=60°$. 故选 D.



2. 10 【解析】如图，过点 B 作 $BP\perp AE$ 于点 P. ∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴ $AD=BC$，$AD/\!/BC$. ∵ E，F 分别是 BC，AD 的中点，∴ $AF=FD=BE=EC$，∴ 四边形 $ABEF$，四边形 $EFDC$ 为平行四边形，∴ $AB=EF=CD$，$AB/\!/EF/\!/CD$. ∵ $AD/\!/BC$，∴ $\angle DAG=\angle BEG$. 又∵ $\angle AGD=\angle EGB$，∴ $\triangle AGD\backsim\triangle EGB$，∴ $\dfrac{AG}{EG}=\dfrac{AD}{EB}=2$，∴ $\dfrac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle EGB}}=\dfrac{\frac{1}{2}AG\cdot BP}{\frac{1}{2}EG\cdot BP}=\dfrac{AG}{EG}=2$. ∵ $\triangle ABE$ 的面积为 6，∴ $S_{\triangle ABG}=6\times\dfrac{2}{3}=4$. ∵ $AB/\!/EF$，∴ $\angle BAG=\angle GEH$. ∵ $\angle AGB=\angle EGH$，∴ $\triangle AGB\backsim\triangle EGH$，∴ $\dfrac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle GEH}}=\left(\dfrac{AG}{EG}\right)^2=2^2=4$. ∵ $S_{\triangle ABG}=4$，∴ $S_{\triangle GEH}=1$. 同理可得 $S_{\triangle CDI}=4$，$S_{\triangle FIH}=1$，∴ $S_{阴影部分}=4+4+1+1=10$. 故答案为 10.



3. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ 【解析】如图，连接 EF，作 $PH\perp AD$ 于 H. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AD/\!/BC$，∴ $\angle DAE=\angle AEB$. ∵ AE 是 $\angle BAD$ 的平分线，∴ $\angle DAE=\angle BAE$，∴ $\angle BAE=\angle AEB$，∴ $AB=BE$. 同理得 $AB=AF$，∴ $AF=BE$. 又∵ $AD/\!/BC$，∴ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形. ∵ $AB=BE$，∴ 四边形 $ABEF$ 是菱形. ∵ $\angle ABC=60°$，$AB=4$，∴ $AB=AF=4$，$\angle ABF=\angle AFB=30°$，$AP\perp BF$，∴ $AP=\dfrac{1}{2}AB=2$，∴ $PH=\sqrt{3}$，$AH=1$，∴ $DH=5$，∴ $\tan\angle ADP=\dfrac{PH}{DH}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. 故答案为$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.



刷 素养

4.【解】(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC$，$AD/\!/BC$. ∵ F 为 AD 的中点，∴ $AF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC$.

∵ $AF/\!/BC$，∴ $\triangle AEF\backsim\triangle CEB$，∴ $\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{AF}{BC}=\dfrac{1}{2}$. ∵ $CE=2$，∴ $AE=1$. ∵ $BC=2AF=2\sqrt{5}$，∴ $BE=\sqrt{BC^2-CE^2}=4$，∴ $AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{17}$. 故答案为 1，$\sqrt{17}$.

(2)$AF=\sqrt{2}CD$. 理由如下：根据题意可知，在“垂中平行四边形”$ABCD$ 中，$AF\perp BD$，且 F 为 BC 的中点，∴ $AD=BC=2BF$，$\angle AEB=90°$. ∵ $AD/\!/BC$，∴ $\triangle AED\backsim\triangle FEB$，∴ $\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{AD}{BF}=\dfrac{DE}{EB}=2$.

设 $BE=a$，则 $DE=2a$. ∵ $AB=BD$，∴ $AB=BD=BE+ED=a+2a=3a$，∴ $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{(3a)^2-a^2}=2\sqrt{2}a$，∴ $EF=\sqrt{2}a$，

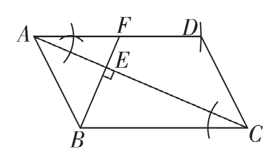
∴ $AF=AE+EF=2\sqrt{2}a+\sqrt{2}a=3\sqrt{2}a$.

∵ $AB=CD$，∴ $\dfrac{AF}{CD}=\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{3\sqrt{2}a}{3a}=\sqrt{2}$，

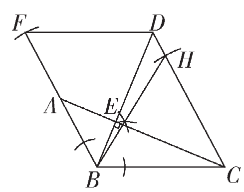
∴ $AF=\sqrt{2}CD$.

(3)①第一种情况：

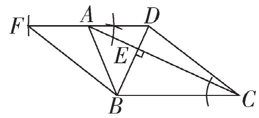
如图(1)，过点 A 作 BC 的平行线 AD，使 $AD=BC$，连接 CD，则四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 延长 BE 交 AD 于点 F. ∵ $BC/\!/AD$，∴ $\triangle AEF\backsim\triangle CEB$，∴ $\dfrac{AF}{BC}=\dfrac{AE}{CE}$. ∵ $AD=BC$，$CE=2AE$，∴ $\dfrac{AF}{BC}=\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{1}{2}$，即 $AF=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}AD$，∴ F 为 AD 的中点，∴ 四边形 $ABCD$ 即为所求作的“垂中平行四边形”，点 E 为“垂中点”.



图(1)



图(2)



图(3)

第二种情况：

如图(2)，作 $\angle ABC$ 的平分线，在 $\angle ABC$ 的平分线上取点 H，使 $CH=CB$，延长 CH 交 BE 的延长线于点 D，在射线 BA 上截取 $AF=AB$，连接 DF，故 A 为 BF 的中点，易得四边形 $BCDF$ 是“垂中平行四边形”，点 E 为“垂中点”.

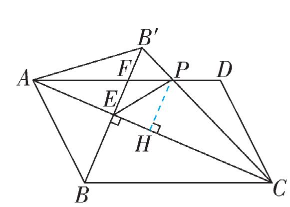
第三种情况：

如图(3)，过点 A 作 $AD/\!/BC$，交 BE 的延长线于点 D，连接 CD，在 DA 延长线上取点 F，使 $AF=AD$，连接 BF，则 A 为 DF 的中点，易得四边形 $BCDF$ 是“垂中平行四边形”，点 E 为“垂中点”.

②若按照①中第一种情况作图，如图(4)，

由题意可知，$\angle ACB=\angle ACP$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，



图(4)

第一部分 考点过关
第二部分 题型突破
第三部分 中考新趋势
狂K重点

$\therefore \angle ACB=\angle PAC$，$\therefore \angle PAC=\angle PCA$，$\therefore \triangle PAC$ 是等腰三角形. 过 P 作 $PH\perp AC$ 于 H，则 $AH=HC$.

$\because BE=5, CE=2AE=12$，$\therefore B'E=BE=5, AE=6$，

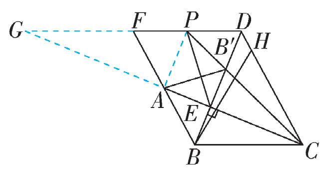
$\therefore AH=HC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}(AE+CE)=\frac{1}{2}(6+12)=9$，$\therefore EH=AH-AE=9-6=3$. $\because PH\perp AC, B'E\perp AC$，$\therefore PH/\!/B'E$，$\therefore \triangle CPH\backsim\triangle CB'E$，$\therefore \frac{PH}{B'E}=\frac{CH}{CE}$，即 $PH=\frac{CH\cdot B'E}{CE}=\frac{9\times5}{12}=\frac{15}{4}$，$\therefore PE=\sqrt{EH^2+PH^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{15}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{41}}{4}$.

若按照①中第二种情况作图，如图(5)，

延长 CA, DF 交于点 G，

易得$\triangle PGC$ 是等腰三角形，

连接 PA. $\because GF/\!/BC$，

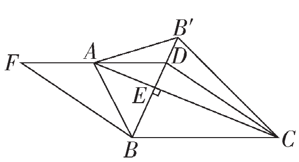


图(5)

$\therefore \triangle GAF\backsim\triangle CAB$，$\therefore \frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}=1$，$\therefore AG=AC$，$\therefore PA\perp AC$. 又$\because B'E\perp AC$，$\therefore B'E/\!/PA$，

$\therefore \triangle CPA\backsim\triangle CB'E$，$\therefore \frac{B'E}{PA}=\frac{CE}{AC}$，即 $PA=\frac{B'E\cdot AC}{CE}=\frac{5\times18}{12}=\frac{15}{2}$，$\therefore PE=\sqrt{PA^2+AE^2}=\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2+6^2}=\frac{3\sqrt{41}}{2}$.

若按照①中第三种情况作图，如图(6)，则射线 CB' 与▱$BCDF$ 没有交点，不存在 PE(不符合题意).



图(6)

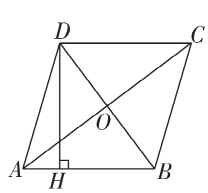
综上所述，$PE=\frac{3\sqrt{41}}{4}$或$\frac{3\sqrt{41}}{2}$.

考点 26 菱形

刷基础

1. B 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore \angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC$. $\because \angle ABD=40°$，$\therefore \angle ABC=80°$，$\therefore \angle ADC=\angle ABC=80°$，故选 B.

2. A 【解析】如图，设对角线 AC, BD 相交于点 O. $\because AC=8, DB=6$，$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times8=4$，$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times6=3$，$\therefore$ 由勾股定理得 $AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. $\because DH\perp AB$，$\therefore S_{菱形ABCD}=AB\cdot DH=\frac{1}{2}AC\cdot BD$，

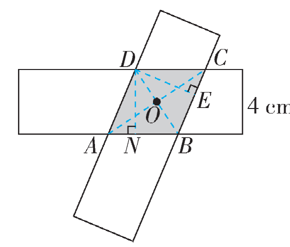


即 $5DH=\frac{1}{2}\times8\times6$，解得 $DH=\frac{24}{5}$. 故选 A.

3. D 【解析】A 选项，添加 $AB=BC$ 后，根据"一组邻边相等的平行四边形是菱形"可证明▱$ABCD$ 是菱形；B 选项，添加 $AC\perp BD$ 后，根据"对角线互相垂直的平行四边形是菱形"可证明▱$ABCD$ 是菱形；C 选项，添加$\angle ABD=\angle CBD$ 后，可推得 $AB=AD$，根据"一组邻边相等的平行四边形是菱形"可证明▱$ABCD$ 是菱形；D 选项，添加 $AC=BD$ 后，可证明▱$ABCD$ 是矩形，不能证明它是菱形. 故选 D.

4. 四条边都相等的四边形是菱形 【解析】$\because$ 分别以点 A, B 为圆心，大于$\frac{1}{2}AB$ 的定长 a 为半径画弧，两弧相交于 C, D，$\therefore AD=AC=BD=BC=a$，$\therefore$ 四边形 $ADBC$ 是菱形. 故答案为四条边都相等的四边形是菱形.

5. 16 【解析】如图，过点 D 作 $DN\perp AB$，$DE\perp CB$，连接 AC，BD，易知 AC 与 BD 交于点 O. 由题意知 $AD/\!/BC$，$AB/\!/CD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. $\because$ 两张矩形纸片等宽，$\therefore DN=DE$. $\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中，$S_{\triangle ADB}=S_{\triangle CDB}$，$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot DN=\frac{1}{2}BC\cdot DE$，$\therefore AB=BC$，$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形. 在旋转过程中，菱形 $ABCD$ 的高不变，底变化，当两张纸片垂直，即 $DA\perp AB$ 时，底边 AB 最短，长度为 4 cm，$\therefore$ 此时菱形 $ABCD$ 的面积为 $4\times4=16(\text{cm}^2)$. 故答案为 16.



6. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB=CD, AB/\!/CD$，$\therefore \angle BAE=\angle DCF$. 在$\triangle ABE$ 和$\triangle CDF$ 中，

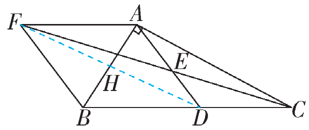
$$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle BAE=\angle DCF,\\ AE=CF,\end{cases}$$
$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF(\text{SAS})$.

(2)【解】四边形 $BEDF$ 是菱形. 理由如下：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore OA=OC, OB=OD, AC\perp BD$. $\because AE=CF, OE=OA-AE, OF=OC-CF$，$\therefore OE=OF$. $\because$ 在四边形 $BEDF$ 中，$OB=OD$，$OE=OF$，$EF\perp BD$，即四边形 $BEDF$ 的对角线互相垂直平分，$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是菱形.

7. (1)【证明】$\because D, E$ 分别是 BC, AD 的中点，

$\therefore BD=DC, AE=DE$. $\because AF/\!/BC$，$\therefore \angle AFE=\angle DCE$. $\because \angle AEF=\angle DEC$，$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DEC(\text{AAS})$，$\therefore AF=DC$，$\therefore AF=BD$. 又$\because AF/\!/BD$，$\therefore$ 四边形 $ADBF$ 是平行四边形. $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，D 是 BC 的中点，$\therefore AD=BD=CD=\frac{1}{2}BC$，$\therefore$ 四边形 $ADBF$ 是菱形.

(2)【解】连接 DF 交 AB 于点 H,如图.



$\because$ 四边形 $ADBF$ 是菱形,

$\therefore DF\perp AB, AD=BD=BF=AF$. $\because AF/\!/DC, AF=DC$,

$\therefore$ 四边形 $AFDC$ 是平行四边形,$\therefore AC=DF$. $\because \tan\angle ABC=2$,

$\therefore \dfrac{AC}{AB}=2$,$\therefore \dfrac{DF}{AB}=2$,即 $DF=2AB$. $\because$ 菱形 $ADBF$ 的面积为 40,

$\therefore \dfrac{1}{2}DF\cdot AB=AB^2=40$,

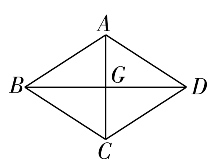
$\therefore AB=2\sqrt{10}$,$\therefore DF=2AB=4\sqrt{10}$,

$BH=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{10}$,$\therefore DH=\dfrac{1}{2}DF=2\sqrt{10}$,

$\therefore BD=\sqrt{BH^2+DH^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(2\sqrt{10})^2}=5\sqrt{2}$,$\therefore$ 菱形 $ADBF$ 的周长是 $4BD=20\sqrt{2}$.

刷 易错

8. 13　120　【解析】如图,四边形 $ABCD$ 为菱形,对角线 AC,BD 交于点 G,$\therefore AC\perp BD$,且 $AG=GC, BG=GD$. $\because$ 菱形的周长为 52,$\therefore$ 菱形的边长 $AD=\dfrac{52}{4}=13$. 令 $AC=10$,则 $AG=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\times 10=5$,$\therefore$ 由勾股定理得 $GD=\sqrt{AD^2-AG^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$,$\therefore BD=2GD=2\times12=24$,$\therefore$ 菱形的面积为 $\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=\dfrac{1}{2}\times 10\times 24=120$. 故答案为 13,120.



易错警示

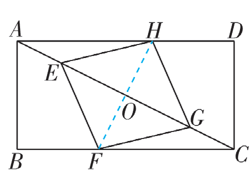
菱形的面积公式

菱形的面积等于两条对角线长乘积的一半,计算时不要漏乘 $\dfrac{1}{2}$.

刷 提升

1. C　【解析】$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中,点 F 是 BD 与 AC 的交点,$AB=10, BD=16$,$\therefore BF\perp AF, BF=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}\times16=8, AF=CF$,$\therefore AF=\sqrt{10^2-8^2}=6$,$\therefore AC=2AF=12$. $\because AE\perp BC$,$\therefore \triangle ACE$ 是直角三角形,$\therefore EF=\dfrac{1}{2}AC=6$,故选 C.

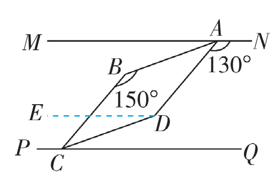
2. B　【解析】连接 FH 交 AC 于 O,如图. $\because$ 四边形 $EFGH$ 是菱形,$\therefore FH\perp AC, OF=OH$,$\therefore \angle AOH=90°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,$\therefore \angle B=\angle D=90°, AD/\!/BC, BC=AD=8$,$\therefore \angle ACB=\angle CAD$. 在



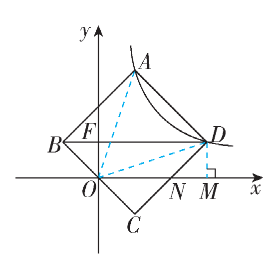
$\triangle AOH$ 与 $\triangle COF$ 中,$\begin{cases}\angle CAD=\angle ACB,\\ \angle AOH=\angle COF,\\ OH=OF,\end{cases}$ $\therefore \triangle AOH\cong\triangle COF(\text{AAS})$,$\therefore AO=CO$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AB=4, BC=8$,$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$,$\therefore AO=\dfrac{1}{2}AC=2\sqrt{5}$. $\because \angle HAO=\angle CAD, \angle AOH=\angle D=90°$,$\therefore \triangle AOH\backsim\triangle ADC$,$\therefore \dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AO}{AD}$,即 $\dfrac{AH}{4\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{8}$,解得 $AH=5$,$\therefore DH=AD-AH=8-5=3$,故选 B.

3. A　【解析】设 $CD=a$. $\because$ 四边形 $CDEF$ 为菱形,$\therefore CD=DE=EF=FC=a, DE/\!/CB$. $\because \triangle OBC$ 和 $\triangle OBA$ 为直角三角形,且 $\angle OBC=\angle A=90°$,$\therefore \angle OED=\angle OBC=90°$. 在 Rt$\triangle ODE$ 中,$\angle BOC=30°$,$\therefore OD=2DE=2a$,$\therefore$ 由勾股定理得 $OE=\sqrt{OD^2-DE^2}=\sqrt{3}a$,$\therefore OC=OD+CD=2a+a=3a$. 在 Rt$\triangle OBC$ 中,$\angle BOC=30°, OC=3a$,$\therefore BC=\dfrac{3}{2}a$,$\therefore$ 由勾股定理得 $OB=\sqrt{OC^2-BC^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a$,$\therefore EB=OB-OE=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a-\sqrt{3}a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. $\because EH\perp AB, \angle A=90°$,$\therefore EH/\!/OA$,$\therefore \triangle BEH\backsim\triangle BOA$,$\therefore \dfrac{EH}{OA}=\dfrac{EB}{OB}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{3\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{1}{3}$. 故选 A.

4. $20°$　【解析】如图,过点 D 作 $DE/\!/PQ$,则 $DE/\!/PQ/\!/MN$,$\therefore \angle ADE=\angle NAD=130°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore \angle ADC=\angle ABC=150°$,$\therefore \angle EDC=\angle ADC-\angle ADE=20°$. $\because DE/\!/PQ$,$\therefore \angle DCQ=\angle EDC=20°$,故答案为 $20°$.



5. 150　【解析】如图,连接 OA,OD,过点 D 作 $DM\perp x$ 轴于点 M,设 BD 与 y 轴交于点 F,CD 与 x 轴交于点 N. $\because O$ 是 BC 的中点,四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore S_{\triangle AOD}=\dfrac{1}{2}S_{菱形ABCD}=S_{\triangle BCD}=200$. $\because BD/\!/x$ 轴,O 为 BC 的中点,$\therefore \triangle CON\backsim\triangle CBD$,$\therefore \dfrac{S_{\triangle OCN}}{S_{\triangle BCD}}=\left(\dfrac{CO}{BC}\right)^2=\dfrac{1}{4}$,$\therefore S_{\triangle OCN}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle BCD}=50$,$\therefore S_{四边形BOND}=200-50=150$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore CB=CD$,$\therefore \angle OBF=\angle BDN$. $\because BD/\!/MN$,$\therefore \angle BDN=\angle DNM$,$\therefore \angle OBF=\angle DNM$. $\because BD/\!/MN$,FO 和 DM 均垂直于 x 轴,$\therefore OF=DM, \angle BFO=\angle DMN=90°$,$\therefore \triangle FBO\cong\triangle MND(\text{AAS})$,$\therefore S_{四边形BOND}=S_{矩形FOMD}=150$.



$\because S_{矩形FOMD}=|k|$,且由图象可知 $k>0$,$\therefore k=150$.

刷素养

6.【解】(1)$\because$ 点 A,B 的坐标分别为 $(8,0),(8,6)$,$\therefore AB=CO=6,AO=8$,$\therefore AC=\sqrt{AO^2+CO^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$. $\because$ 点 M 以每秒 1 个单位长度的速度运动,运动的时间为 t 秒,$\therefore OM=t$,$\therefore AM=AO-OM=8-t$,$\therefore P$ 点的横坐标为 t. $\because MP\perp OA$,$\therefore CO/\!/PM$,$\therefore \triangle APM\backsim\triangle ACO$,$\therefore \frac{PM}{CO}=\frac{AM}{AO}=\frac{AP}{AC}$,即 $\frac{PM}{6}=\frac{8-t}{8}=\frac{AP}{10}$,解得 $PM=6-\frac{3t}{4}$,$AP=10-\frac{5t}{4}$,$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(t,6-\frac{3t}{4}\right)$,$\therefore PC=AC-AP=10-\left(10-\frac{5t}{4}\right)=\frac{5t}{4}$. 故答案为 $\left(t,6-\frac{3t}{4}\right)$,$\frac{5t}{4}$.

(2)由(1)可知点 P 的坐标为 $\left(t,6-\frac{3t}{4}\right)$.

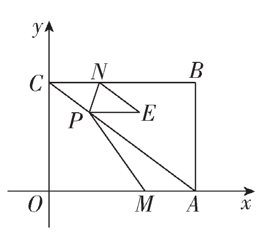
由题意可知,$BN=t$,$\therefore CN=8-t$,$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(8-t,6)$. 当 $\triangle CNP\backsim\triangle CBA$ 时,$\angle CNP=\angle CBA=90°$,$\therefore PN/\!/BA$,$\therefore$ 点 P 和点 N 的横坐标相等,$\therefore 8-t=t$,解得 $t=4$(舍去).

当 $\triangle CPN\backsim\triangle CBA$ 时,$\frac{CP}{BC}=\frac{CN}{AC}$,即 $\frac{\frac{5t}{4}}{8}=\frac{8-t}{10}$,解得 $t=\frac{128}{41}$.

综上,当 $t=\frac{128}{41}$ 时,以 C,P,N 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似.

(3)存在,$t=\frac{32}{9}$ 或 $\frac{8}{3}$.

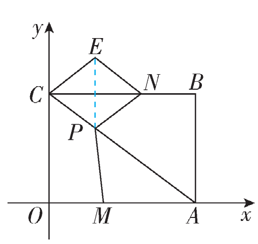
如图(1)所示,当四边形 $CPEN$ 是菱形时,



图(1)

$CP=CN$. $\because CP=\frac{5t}{4}$,$CN=8-t$,$\therefore \frac{5t}{4}=8-t$,解得 $t=\frac{32}{9}$;

如图(2)所示,当四边形 $CPNE$ 是菱形时,连接 PE,



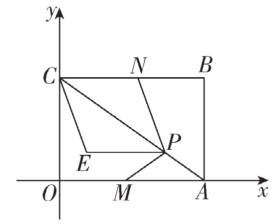
图(2)

根据菱形的性质可得,PE 垂直平分 CN,

$\therefore N$ 点的横坐标是 P 点横坐标的 2 倍,

$\therefore 8-t=2t$,解得 $t=\frac{8}{3}$;

如图(3)所示,当四边形 $CEPN$ 是菱形时,



图(3)

$CN=PN$,$\therefore 8-t=\sqrt{(8-t-t)^2+\left(6-6+\frac{3t}{4}\right)^2}$,整理得 $57t^2-256t=0$,解得 $t_1=0$(舍去),$t_2=\frac{256}{57}>4$(舍去). 综上所述,$t=\frac{32}{9}$ 或 $\frac{8}{3}$.

考点 27　矩形、正方形

刷基础

1. B　【解析】$\because$ 矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于 O 点,$\therefore OB=OC$,$\therefore \angle OBC=\angle OCB$. $\because \angle AOB$ 是 $\triangle OBC$ 的一个外角,$\therefore \angle AOB=\angle OBC+\angle ACB=54°$,$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times54°=27°$. 故选 B.

2. C　【解析】$\because$ 对角线相等的平行四边形是矩形,$\therefore$ 要判断这块木板是否为矩形,可以测量对角线是否相等. 故选 C.

3. 9　**【解析】**$\because \angle AED=90°$,F 是 AD 边的中点,$EF=6$ cm,$\therefore AD=2EF=12$ cm. $\because \angle EAD=30°$,$\therefore AE=AD\cdot\cos30°=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$(cm). 又$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,$\therefore AD/\!/BC$,$\angle B=90°$,$\therefore \angle BEA=\angle EAD=30°$,$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,$BE=AE\cdot\cos\angle BEA=6\sqrt{3}\times\cos30°=6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9$(cm),故答案为 9.

4. (1)**【证明】**选择①$AF=EF$.

证明:$\because$ 四边形 $ADBE$ 的对角线 AB,ED 相交于点 F,且 $AF=BF$,$EF=DF$,$\therefore$ 四边形 $ADBE$ 是平行四边形.

$\because AF=EF$,$\therefore AF=BF=EF=DF$,

$\therefore AB=ED$,$\therefore$ 四边形 $ADBE$ 为矩形.

选择②$AB=AC$.

证明:$\because$ 四边形 $ADBE$ 的对角线 AB,ED 相交于点 F,且 $AF=BF$,$EF=DF$,

$\therefore$ 四边形 $ADBE$ 是平行四边形,$\therefore AE/\!/BC$.

又$\because AC/\!/ED$,$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 是平行四边形,$\therefore AC=DE$. 又$\because AB=AC$,$\therefore AB=ED$,$\therefore$ 四边形 $ADBE$ 为矩形.(选择其中一个条件进行证明即可)

(2)**【解】**$\because$ 四边形 $ADBE$ 是矩形,

$\therefore \angle EBD=90°$,$BD=AE=5$. 又$\because AC/\!/ED$,$\therefore \angle EDB=\angle C$,

$\therefore \tan\angle BDE=\tan C=\frac{12}{5}$.

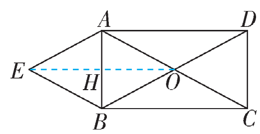
$\because$ 在 $Rt\triangle EDB$ 中，$BE=BD\cdot\tan\angle BDE=5\times\frac{12}{5}=12$，

$\therefore DE=\sqrt{BE^2+BD^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$，$\therefore DF=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\times 13=\frac{13}{2}$.

5. (1)【证明】$\because AE/\!/BD, BE/\!/AC$，$\therefore$ 四边形 $AEBO$ 是平行四边形. $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中，AC,BD 相交于点 O，

$\therefore AC=BD, OA=\frac{1}{2}AC, OB=\frac{1}{2}BD$，$\therefore OA=OB$，$\therefore$ 平行四边形 $AEBO$ 是菱形.

(2)【解】如图，连接 OE，交 AB 于点 H.



$\because$ 四边形 $AEBO$ 是菱形，

$\therefore AB\perp OE, BH=\frac{1}{2}AB=1$，

$OE=2OH$.

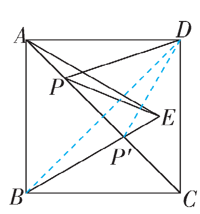
$\because OB=3$，$\therefore OH=\sqrt{OB^2-BH^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore OE=2OH=4\sqrt{2}$，$\therefore$ 菱形 $AEBO$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB\cdot OE=\frac{1}{2}\times 2\times 4\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

6. $3\sqrt{2}$ 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore OC=OD$，$\angle COD=90°$，$\therefore \triangle COD$ 是等腰直角三角形，$\therefore CD=\sqrt{OD^2+OC^2}=\sqrt{2}OD$. $\because CD=6$，$\therefore OD=\frac{\sqrt{2}}{2}CD=3\sqrt{2}$. 故答案为 $3\sqrt{2}$.

7. $(4,2\sqrt{3})$ 【解析】$\because A(-2,0)$，$\therefore OA=2$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AD/\!/BC, AB/\!/CD$，故由题意得 $AD'/\!/BC', AB/\!/C'D'$. $\because \angle ABC'=120°$，$\therefore \angle BAD'=60°$，$\therefore \angle OD'A=30°$，$\therefore AO=\frac{1}{2}AD'=2$，$\therefore AD'=4$，$\therefore OD'=\sqrt{AD'^2-OA^2}=2\sqrt{3}$. $\because C'D'=AD'=4, C'D'/\!/AB$，$\therefore$ 点 C' 的坐标为 $(4,2\sqrt{3})$，故答案为 $(4,2\sqrt{3})$.

8. $2\sqrt{3}$ 【解析】如图所示，设 BE 与 AC 交于点 P'，连接 $BD, P'D$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore$ 点 B 与点 D 关于 AC 对称，$\therefore P'D=P'B$，$\therefore P'D+P'E=P'B+P'E=BE$，即点 P 是 AC 与 BE 的交点时，$PD+PE$ 的值最小，即为 BE 的长度. $\because$ 正方形 $ABCD$ 的面积为 12，$\therefore AB=2\sqrt{3}$. $\because \triangle ABE$ 是等边三角形，$\therefore BE=AB=2\sqrt{3}$，故答案为 $2\sqrt{3}$.



9. (1)【解】在正方形 $ABCD$ 中，$\angle BCD=90°$，$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle BCD=\frac{1}{2}\times 90°=45°$，故答案为 45.

(2)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=AD, \angle EAB=\angle EAD$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADE$ 中，

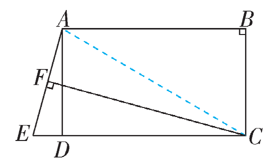
$\because \begin{cases} EA=EA, \\ \angle EAB=\angle EAD, \\ AB=AD, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABE\cong\triangle ADE(SAS)$.

(3)【解】$\because \triangle ABE\cong\triangle ADE$，$\therefore \angle AED=\angle AEB$.

$\because \angle AEB=\angle EBC+\angle BCE=20°+45°=65°$，$\therefore \angle AED=65°$，故答案为 65.

10. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AB=BC$，$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 为菱形. 又 $\because AB\perp BC$，$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 为正方形.

(2)【解】连接 AC，如图所示.

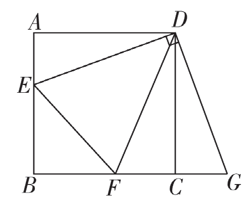


$\because CF\perp AE$ 于点 F，点 F 为 AE 的中点，$\therefore CF$ 为线段 AE 的垂直平分线，$\therefore AC=CE=8\sqrt{2}$，$AF=EF$，$\therefore S_{\triangle AFC}=S_{\triangle EFC}=\frac{1}{2}S_{\triangle AEC}$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AD=BC$，$\angle ADC=90°$. 在 $Rt\triangle ACD$ 中，由勾股定理得 $AD^2+CD^2=AC^2$，

$\therefore AD^2=\frac{1}{2}AC^2=\frac{1}{2}\times(8\sqrt{2})^2=64$，$\therefore AD=8$（负值已舍去），

$\therefore S_{\triangle EFC}=\frac{1}{2}S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}CE\cdot AD=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}\times 8=16\sqrt{2}$.

11.【解】(1) 如图所示.



(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle A=\angle B=\angle DCF=\angle ADC=90°$，$AD=AB=BC=CD=12$，

$\therefore \angle DCG=90°$.

由旋转的性质得 $\angle EDG=90°$，$DE=DG$，$\therefore \angle ADC=\angle EDG$，

$\therefore \angle ADE=\angle CDG$. $\because AD=DC, DE=DG$，$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CDG$，

$\therefore AE=CG=4$. $\because \angle EDF=45°$，$\therefore \angle GDF=\angle EDG-\angle EDF=45°$，$\therefore \angle EDF=\angle GDF$. $\because DF=DF, DE=DG$，$\therefore \triangle EDF\cong\triangle GDF(SAS)$，$\therefore EF=GF$. 设 $CF=x$，$\therefore BF=BC-CF=12-x$.

$\because AE=CG=4$，$\therefore BE=AB-AE=8$，$GF=CF+CG=4+x$，

$\therefore EF=GF=4+x$. 在 $Rt\triangle EBF$ 中，$BE^2+BF^2=EF^2$，$\therefore 8^2+(12-x)^2=(4+x)^2$，$\therefore x=6$，$\therefore EF=4+x=10$，即 EF 的长为 10.

12. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore \angle A=\angle D=90°$. $\because \angle BEF=90°$，$\therefore \angle ABE+\angle AEB=$

$\angle AEB+\angle DEF=90°$，$\therefore \angle ABE=\angle DEF$，$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DEF$.

(2)【解】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB=AD=CD=BC=6$，$AD/\!/BG$.

$\because CF=3FD$，$\therefore DF=1.5$. 设 $DE=x$，则 $AE=6-x$.

$\because \triangle ABE\backsim\triangle DEF$，$\therefore \frac{DF}{AE}=\frac{DE}{AB}$，即$\frac{1.5}{6-x}=\frac{x}{6}$，

$\therefore x=3$，$\therefore DE=3$.

$\because AD/\!/BG$，$\therefore \angle DEF=\angle G$. $\because \angle DFE=\angle CFG$，

$\therefore \triangle CGF\backsim\triangle DEF$，$\therefore \frac{DE}{CG}=\frac{DF}{CF}$.

$\because CF=3FD$，$\therefore \frac{3}{CG}=\frac{1}{3}$，$\therefore CG=9$，$\therefore BG=BC+CG=15$.

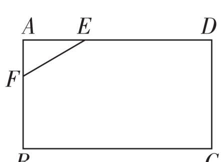
刷 易错

13. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$或 4 或$\frac{8\sqrt{3}}{3}$　【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$.

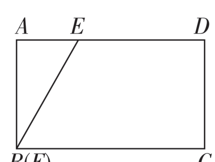
当 EF 与矩形 $ABCD$ 的边构成 30°角时，有以下几种情况：

①如图(1)，当$\angle AEF=30°$时，

$\because \cos 30°=\frac{AE}{EF}$，$\therefore EF=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.



图(1)

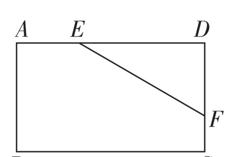


图(2)

②如图(2)，当$\angle AFE=30°$时，$\because AB=2\sqrt{3}$，$AE=2$，$\therefore$ 此时 F 与 B 重合，$\therefore EF=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$.

③如图(3)，当$\angle DEF=30°$时，$ED=6-2=4$.

$\because \cos 30°=\frac{DE}{EF}$，$\therefore EF=\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.



图(3)

综上，EF 的长是$\frac{4\sqrt{3}}{3}$或 4 或$\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

故答案为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$或 4 或$\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

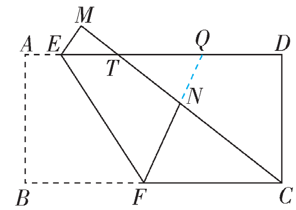
易错警示

矩形相关的分类讨论

矩形 $ABCD$ 有 4 条边，EF 与矩形 $ABCD$ 的边构成的夹角需要分类讨论.

刷 提升

1. D　【解析】如图，设 MC 与 AD 的交点为 T，延长 FN 交 AD 于 Q. $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中，$AD=2AB=8$，$\therefore AD=BC=8$，$AB=CD=4$，$\angle A=\angle B=\angle BCD=\angle D=90°$，$AD/\!/BC$. 由折叠可得 $BF=NF=3$，$\angle MNF=\angle B=90°$，$MN=AB=4$，$\therefore \angle FNC=90°$，$CF=5$，



$\therefore CN=\sqrt{5^2-3^2}=4$. 由折叠可得$\angle BFE=\angle QFE$. $\because AD/\!/BC$，$\therefore \angle DEF=\angle BFE$，$\angle DTC=\angle FCN$，$\therefore \angle QEF=\angle QFE$，$\therefore QE=QF$. $\because \angle MNF=90°$，$\therefore \angle TNQ=90°$，$\therefore \frac{NQ}{TQ}=\sin\angle NTQ=\sin\angle NCF=\frac{FN}{FC}=\frac{3}{5}$. 设 $NQ=3x$，则 $TQ=5x$，$\therefore TN=\sqrt{QT^2-NQ^2}=4x$，$\therefore TC=4x+4$，$\therefore \sin\angle DTC=\frac{3}{5}=\frac{CD}{CT}=\frac{4}{4x+4}$，解得 $x=\frac{2}{3}$，$\therefore NQ=3\times\frac{2}{3}=2$，$TQ=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$，$\therefore EQ=FQ=3+2=5$. $\because \frac{CD}{DT}=\tan\angle CTD=\tan\angle NCF=\frac{FN}{CN}=\frac{3}{4}$，$\therefore \frac{4}{DT}=\frac{3}{4}$，$\therefore DT=\frac{16}{3}$，$\therefore QD=TD-TQ=\frac{16}{3}-\frac{10}{3}=2$，$\therefore AE=AD-QE-DQ=8-5-2=1$. 故选 D.

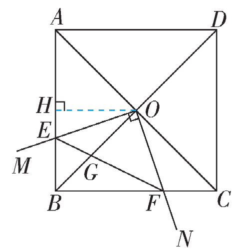
2. 5　【解析】在矩形 $ABCD$ 中，内接三个大小相同的正方形，$\therefore EH=FE=2FG$，$\angle HEF=\angle EFG=90°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=90°$，$\therefore \angle AEH+\angle BEF=\angle BFE+\angle BEF=90°$，$\therefore \angle AEH=\angle BFE$. 在 $\triangle AEH$ 和 $\triangle BFE$ 中，$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ \angle AEH=\angle BFE,\\ EH=FE,\end{cases}$ $\therefore \triangle AEH\cong\triangle BFE(\text{AAS})$，$\therefore BF=AE=5-CF$. $\because \angle CFG+\angle BFE=\angle BFE+\angle BEF=90°$，$\therefore \angle CFG=\angle BEF$，$\therefore \triangle BEF\backsim\triangle CFG$，$\therefore \frac{CF}{BE}=\frac{CG}{BF}=\frac{FG}{EF}=\frac{1}{2}$，$\therefore BE=2CF$，$CG=\frac{1}{2}BF$，$\therefore 5-CF+2CF=AB=6\text{ cm}$，$\therefore CF=1\text{ cm}$，$\therefore BF=5-CF=4\text{ cm}$，$\therefore CG=\frac{1}{2}BF=2\text{ cm}$，$\therefore FG=\sqrt{CF^2+CG^2}=\sqrt{5}\text{ cm}$，$\therefore$ 每个小正方形的面积为 $FG^2=(\sqrt{5})^2=5(\text{cm}^2)$，故答案为 5.

3. $y=\frac{18}{x}$　【解析】$\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，$\therefore OC=AB=3$. 设正方形 $CDEF$ 的边长为 m，$\therefore CD=CF=EF=m$，$\therefore OF=OC+CF=3+m$. $\because BC=2CD$，$\therefore BC=2m$，$\therefore B(3,2m)$，$E(3+m,m)$. 设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$，$\therefore 3\times2m=(3+m)m$，解得 $m=3$ 或 $m=0$(不合题意，舍去)，$\therefore B(3,6)$，$\therefore k=3\times6=18$，$\therefore$ 这个反比例函数的表达式是 $y=\frac{18}{x}$，故答案为 $y=\frac{18}{x}$.

4. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　【解析】$\because AF=1$，$BF=2$，$\therefore AB=1+2=3$，$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 3. 在 $\text{Rt}\triangle DAF$ 中，由勾股定理，得 $DF=\sqrt{AD^2+AF^2}=\sqrt{10}$. $\because DC=BC$，$\angle DCE=\angle CBF=90°$，$CE=$

BF，∴ $\triangle DCE\cong\triangle CBF$（SAS），∴ $\angle CDE=\angle BCF$. ∵ $\angle CDE+\angle CED=90^\circ$，∴ $\angle BCF+\angle CED=90^\circ$，∴ $DE\perp CF$. ∵ N 是 DF 的中点，即 MN 为 Rt$\triangle DFM$ 的斜边 DF 上的中线，∴ $MN=\frac{1}{2}DF=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 故答案为$\frac{\sqrt{10}}{2}$.

5. $\frac{1}{2}$ 【**解析**】如图，过点 O 作 $OH\perp AB$ 于 H. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $OA=OB$，$AC\perp BD$，∴ $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形，∴ 点 H 是 AB 中点，∴ $AH=OH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$. ∵ 四边形

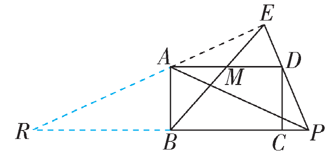


$ABCD$ 是正方形，∴ $OB=OC$，$\angle OBE=\angle OCF=45^\circ$，$\angle BOC=90^\circ$，∴ $\angle BOF+\angle COF=90^\circ$. ∵ $\angle EOF=90^\circ$，∴ $\angle BOF+\angle BOE=90^\circ$，∴ $\angle BOE=\angle COF$. 在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle COF$ 中，$\begin{cases}\angle BOE=\angle COF,\\ OB=OC,\\ \angle OBE=\angle OCF,\end{cases}$ ∴ $\triangle BOE\cong\triangle COF$（ASA），∴ $OE=OF$，$S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COF}$，∴ $S_{四边形OEBF}=S_{\triangle BEF}+S_{\triangle OEF}=S_{\triangle BOE}+S_{\triangle BOF}=S_{\triangle COF}+S_{\triangle BOF}=S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$. 当 $\triangle BEF$ 的面积最大时，$\triangle OEF$ 的面积最小. ∵ $S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}OE\cdot OF=\frac{1}{2}OE^2$，∴ 当 OE 最小时，$S_{\triangle OEF}$ 有最小值. 由垂线段最短可知，当点 E 与点 H 重合时，$\triangle OEF$ 的面积最小，即 $\triangle BEF$ 的面积最大，此时 $AE=AH=\frac{1}{2}$. 故答案为$\frac{1}{2}$.

6. ①②③④ 【**解析**】∵ 将 $\triangle ABE$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle CBF$，∴ $\triangle ABE\cong\triangle CBF$，∴ $BE=BF$，故①正确. ∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $\angle BAC=\angle ACB=45^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$. ∵ AE 平分 $\angle CAB$，∴ $\angle BAE=22.5^\circ$. ∵ $\triangle ABE\cong\triangle CBF$，∴ $\angle BCF=\angle BAE=22.5^\circ$，$\angle F=\angle AEB=90^\circ-22.5^\circ=67.5^\circ$，∴ $\angle ACF=\angle ACB+\angle BCF=45^\circ+22.5^\circ=67.5^\circ$，∴ $\angle ACF=\angle F$，故②正确. ∵ $\angle ACF=\angle F$，∴ $AC=AF$. ∵ AG 平分 $\angle CAB$，∴ $AG\perp CF$，$CG=FG$. ∵ $\angle CBF=90^\circ$，∴ $BG=CG=\frac{1}{2}CF$，∴ $\angle CBG=\angle BCG$. ∵ $\angle ABC=\angle DCB=90^\circ$，∴ $\angle ABG=\angle DCG$. ∵ $AB=DC$，∴ $\triangle ABG\cong\triangle DCG$（SAS），∴ $\angle AGB=\angle DGC$. ∵ $AG\perp CF$，∴ $\angle AGB+\angle DGA=\angle DGC+\angle DGA=90^\circ$，∴ $BG\perp DG$，故③正确. ∵ $\triangle ABG\cong\triangle DCG$，∴ $\angle CDG=\angle BAG=\angle CAG$. ∵ $\angle DCH=\angle ACE=45^\circ$，∴ $\triangle DCH\backsim\triangle ACE$，∴ $\frac{DH}{AE}=\frac{DC}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $\frac{AE}{DH}=\sqrt{2}$，故④正确. 综上，正确的结论是①②③④，故答案为①②③④.

7.【**证明**】(1) ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD/\!/BC$，∴ $\triangle AFM\backsim\triangle CFB$，$\triangle EDM\backsim\triangle ECB$，∴ $\frac{MF}{BF}=\frac{AM}{BC}$，$\frac{EM}{EB}=\frac{MD}{BC}$. ∵ $AM=MD$，∴ $\frac{MF}{BF}=\frac{EM}{EB}$.

(2) 延长 EA，PB 交于点 R，如图.



∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD/\!/BC$，∴ $\triangle EAM\backsim\triangle ERB$，$\triangle EDM\backsim\triangle EPB$，∴ $\frac{AM}{BR}=\frac{EM}{EB}$，$\frac{EM}{EB}=\frac{DM}{BP}$，∴ $\frac{AM}{BR}=\frac{DM}{BP}$. ∵ $AM=MD$，∴ $BR=BP$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle ABC=90^\circ$，即 $AB\perp BC$，∴ $AR=AP$，∴ $\angle R=\angle APR$. ∵ $AD/\!/BC$，∴ $\angle EAD=\angle R$，$\angle PAD=\angle APR$，∴ $\angle EAD=\angle PAD$.

刷素养

8.【**解**】(1) $QD=PQ$. 理由如下：

由折叠的性质可知 GH 垂直平分 PD，∴ $QD=PQ$.

(2) 由(1)知，QH 垂直平分 PD，

∴ $DH=PH$，$QD=QP$. ∵ $QH=QH$，

∴ $\triangle QHP\cong\triangle QHD$（SSS），∴ $\angle QHP=\angle QHD$，$\angle QPH=\angle QDH$.

在正方形 $ABCD$ 中，$\angle ACB=\angle ACD$.

∵ $AC\perp PH$，∴ 易得 AC 垂直平分 PH，∴ $QP=QH$，∴ $QD=QH$，$\angle QHP=\angle QPH$，∴ $\angle QDH=\angle QHD$，

∴ $\angle QHD=\angle QHP=\angle QDH=\angle QPH$.

∵ AC 垂直平分 PH，∴ $PC=CH$，∴ $\angle PHC=\angle HPC=45^\circ$，

∴ $\angle PHD=180^\circ-45^\circ=135^\circ$，

∴ $\angle QDH=\angle QPH=\angle QHD=\angle QHP=\frac{135^\circ}{2}=67.5^\circ$，

∴ $\angle DQC=180^\circ-\angle ACD-\angle QDH=67.5^\circ$，

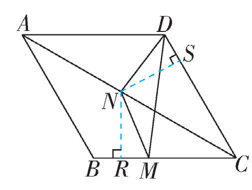
∴ $\angle DQC=\angle QDH$，∴ $QC=CD$. ∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 8 cm，∴ $QC=DC=8$ cm.

(3) ①过点 N 作 $NR\perp BC$ 于点 R，作 $NS\perp DC$ 于点 S，如图(1)，

∴ $\angle NRC=\angle NSC=\angle NSD=90^\circ$.

∵ $\angle BCD=60^\circ$，∴ $\angle RNS=360^\circ-2\times90^\circ-60^\circ=120^\circ$.

∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，AC 为菱形 $ABCD$ 的对角线，∴ $\angle ACB=\angle ACD$，



图(1)

∴ $NR=NS$.

∵ $MN=ND$，∴ Rt$\triangle NRM\cong$ Rt$\triangle NSD$（HL），∴ $\angle RNM=\angle SND$，∴ $\angle MND=\angle SND+\angle SNM=\angle RNM+\angle SNM=\angle RNS=120^\circ$.

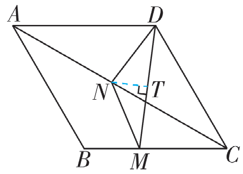
第一部分 考点过关
第二部分 题型突破
第三部分 中考新趋势
狂K重点

②存在. 最小值为 $100\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$.

过点 N 作 $NT\perp MD$ 于点 T,如图(2).

$\because MN=ND$,

$\therefore MT=DT=\frac{1}{2}MD.$



图(2)

$\because \angle MND=120°$,

$\therefore \angle NDM=\angle NMD=30°$, $\therefore NT=\frac{1}{2}MN.$

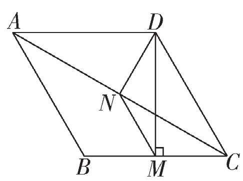
$\because$ 在 Rt$\triangle MNT$ 中,$NT^2+MT^2=MN^2$,$\therefore NT^2+\frac{1}{4}MD^2=4NT^2$,整理得 $NT=\frac{\sqrt{3}}{6}MD$,

$\therefore S_{\triangle MND}=\frac{1}{2}MD\cdot NT=\frac{1}{2}MD\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}MD=\frac{\sqrt{3}}{12}MD^2$,

$\therefore$ 当 MD 最小时,$\triangle MND$ 的面积最小,即当 $MD\perp BC$ 时,$\triangle MND$ 的面积最小,如图(3).

$\because \angle BCD=60°$,

$\therefore \angle MDC=30°$. $\because$ 菱形草坪 $ABCD$ 的边长为 40 m,$\therefore MC=\frac{1}{2}DC=20$ m,$\therefore DM=\sqrt{DC^2-MC^2}=20\sqrt{3}$ m,$\therefore S_{\triangle MND}=\frac{\sqrt{3}}{12}MD^2=\frac{\sqrt{3}}{12}\times 1\ 200=100\sqrt{3}\,(\mathrm{m}^2)$.



图(3)

专题 10　几何图形动态探究

刷 难关

1.【解】(1)由题意可得 $AP=2t$ m,$CQ=t$ m.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle ABC=90°$,

$\therefore$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{10^2+24^2}=26$(m),

$\therefore CP=(26-2t)$ m.

$\because \angle PCQ=\angle ACB$,

$\therefore$ 当$\angle PQC=\angle B$ 时,$\triangle CQP\backsim\triangle CBA$,

则$\frac{PC}{AC}=\frac{CQ}{CB}$,即$\frac{26-2t}{26}=\frac{t}{24}$,解得 $t=\frac{312}{37}$;

当$\angle PQC=\angle BAC$ 时,$\triangle CQP\backsim\triangle CAB$,

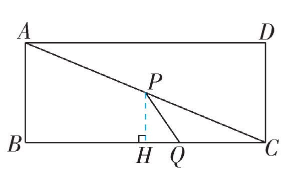
则$\frac{PC}{BC}=\frac{CQ}{CA}$,即$\frac{26-2t}{24}=\frac{t}{26}$,解得 $t=\frac{169}{19}$.

综上,当 t 为$\frac{312}{37}$或$\frac{169}{19}$时,以 P,Q,C 为顶点的三角形与$\triangle ABC$ 相似.

(2)四边形 $ABQP$ 与$\triangle CPQ$ 的面积不能相等. 理由如下:

作 $PH\perp BC$ 于点 H,如图,

$\therefore \angle PHC=\angle ABC=90°$,



$\therefore PH/\!/AB$,

$\therefore \triangle CPH\backsim\triangle CAB$,

$\therefore \frac{PH}{AB}=\frac{PC}{AC}$,即$\frac{PH}{10}=\frac{26-2t}{26}$,

$\therefore PH=\frac{130-10t}{13}$.

假设四边形 $ABQP$ 与$\triangle CPQ$ 的面积相等,

则 $S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CPQ}=S_{\triangle CPQ}$,即 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle CPQ}$,

$\therefore 2\cdot\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{130-10t}{13}=\frac{1}{2}\times10\times24$,

整理得 $t^2-13t+156=0$.

$\because \Delta=(-13)^2-4\times1\times156=-455<0$,

$\therefore$ 此方程无实数解,

$\therefore$ 四边形 $ABQP$ 与$\triangle CPQ$ 的面积不能相等.

2.【解】(1)如图(1)所示,过点 D 作 $DE\perp BC$ 于 E.

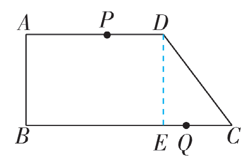
$\because AD/\!/BC$,$\angle A=90°$,

$\therefore \angle B=90°$,

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是矩形,

$\therefore AB=DE$,$AD=BE=6$,

$\therefore CE=BC-BE=3$.



图(1)

$\because CD=5$,

$\therefore DE=\sqrt{DC^2-CE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,

$\therefore AB=4$,

故答案为 4.

(2)点 P 从 A 点运动到 D 点所需时间为 $6\div2=3$(秒),点 Q 从 C 点运动到 B 点所需时间为 $9\div1=9$(秒),$\therefore 0\leqslant t\leqslant 9$.

当 $0\leqslant t<3$ 时,$PD=6-2t$,

当 $3\leqslant t\leqslant 9$ 时,$PD=2t-6$.

综上,$PD=\begin{cases}6-2t\,(0\leqslant t<3),\\2t-6\,(3\leqslant t\leqslant 9).\end{cases}$

(3)若以 P,D,C,Q 为顶点的四边形为平行四边形,

则 $PD=QC$.

由(2)得,$PD=\begin{cases}6-2t\,(0\leqslant t<3),\\2t-6\,(3\leqslant t\leqslant 9),\end{cases}$

根据题意得,$QC=t$,

$\therefore$ 当 $6-2t=t$ 时,$t=2$,

当 $2t-6=t$ 时,$t=6$.

综上,当以 P,D,C,Q 为顶点的四边形为平行四边形时,t 的值为 2 或 6.

(4)当点 P 在线段 AD 上,且 $BP=BE=5$ 时,

$AP=\sqrt{BP^2-AB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$,

$\therefore 2t=3$,

$\therefore t=\frac{3}{2}$.

当点 P 在线段 AD 上，且 $PE=BE=5$ 时，如图(2)所示，过点 P 作 $PM\perp BE$ 于 M，

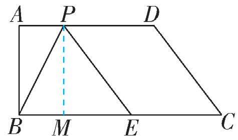
则 $PM=4$，四边形 $ABMP$ 是矩形，

$\therefore BM=AP=2t$，$\therefore ME=5-2t$.

在 Rt$\triangle PME$ 中，根据勾股定理得，

$PM^2+ME^2=PE^2$，

$\therefore 4^2+(5-2t)^2=5^2$，



图(2)

解得 $t=1$ 或 $t=4$(不符合题意，舍去).

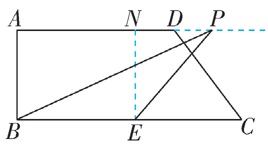
当点 P 在线段 AD 的延长线上，且 $PE=BE=5$ 时，如图(3)所示，过点 E 作 $EN\perp AD$ 于 N，

则 $NE=4$，四边形 $ABEN$ 是矩形，

$\therefore BE=AN=5$，

$\therefore NP=2t-5$.

在 Rt$\triangle ENP$ 中，根据勾股定理得，$NE^2+NP^2=EP^2$，



图(3)

$\therefore 4^2+(2t-5)^2=5^2$，

解得 $t=4$ 或 $t=1$(不符合题意，舍去).

综上，当$\triangle PBE$ 是以 BE 为腰的等腰三角形时，t 的值为 $\dfrac{3}{2}$ 或 1 或 4.

3. (1)【**证明**】①$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=DA$，$\angle ABP=\angle DAF=90°$，

$\therefore \angle BAP+\angle DAG=90°$.

$\because$ 将线段 AP 绕点 P 顺时针旋转 90°得到线段 PE，

$\therefore \angle APE=90°$.

$\because DF/\!/EP$，

$\therefore \angle AGD=\angle APE=90°$，

$\therefore \angle DAG+\angle ADF=90°$，

$\therefore \angle BAP=\angle ADF$，

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle DAF$(ASA).

②$\because \triangle ABP\cong\triangle DAF$，

$\therefore AP=DF$.

$\because$ 将线段 AP 绕点 P 顺时针旋转 90°得到线段 PE，

$\therefore AP=PE$，

$\therefore DF=PE$.

$\because DF/\!/EP$，

$\therefore$ 四边形 $PEDF$ 是平行四边形.

(2)【**证明**】如图，过点 E 作 $EH\perp DC$ 于点 H，$EI\perp BM$ 于点 I.

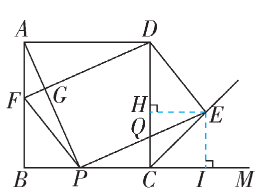
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle B=\angle BCD=90°$，$AB=BC$，

$\therefore \angle HCI=180°-\angle BCD=90°$.

$\because EH\perp DC$，$EI\perp BM$，

$\therefore \angle EHC=\angle PIE=90°$，



$\therefore$ 四边形 $CIEH$ 是矩形，$\angle B=\angle PIE$，$\angle EPI+\angle PEI=90°$.

$\because \angle APE=90°$，

$\therefore \angle APB+\angle EPI=180°-\angle APE=90°$，

$\therefore \angle APB=\angle PEI$.

$\because AP=PE$，

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle PIE$(AAS)，

$\therefore AB=PI$，$BP=IE$，

$\therefore BC=PI$，

$\therefore BC-PC=PI-CP$，

即 $BP=CI$，

$\therefore IE=CI$，

$\therefore$ 四边形 $CIEH$ 是正方形，

$\therefore \angle DCE=\angle MCE$，

$\therefore$ 点 E 始终在$\angle DCM$ 的平分线上.

(3)【**解**】过点 E 作 $EH\perp DC$ 于点 H，$EI\perp BM$ 于点 I.

$\because ED=EQ$，$EH\perp CD$，

$\therefore H$ 为 DQ 的中点，

$\therefore QH=DH$.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 2，

$\therefore CD=BC=PI=2$.

$\because BP=x$，

$\therefore BP=IE=x$，$PC=BC-BP=2-x$.

$\because$ 四边形 $CIEH$ 是正方形，

$\therefore CH=IE=x$，

$\therefore DH=CD-CH=2-x$，

$\therefore QH=DH=2-x$，

$\therefore CQ=CD-DH-QH=2x-2$.

$\because \angle BCD=\angle PIE=90°$，

$\therefore QC/\!/EI$，

$\therefore \triangle PCQ\backsim\triangle PIE$，

$\therefore \dfrac{CQ}{IE}=\dfrac{PC}{PI}$，

$\therefore \dfrac{2x-2}{x}=\dfrac{2-x}{2}$，

解得 $x_1=-1+\sqrt{5}$，$x_2=-1-\sqrt{5}$(舍去)，

$\therefore$ 当 x 的值为$-1+\sqrt{5}$时，$ED=EQ$.

4. (1)【**解**】①$\because a=\sqrt{5}-1$，$b=2$，

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore$ 该矩形是黄金矩形，故此说法正确，故答案为√.

②$\because$ 该矩形是黄金矩形，

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\because a=\sqrt{5}-1$，

$\therefore b=2$，

$\therefore$ 矩形的面积为 $2(\sqrt{5}-1)=2\sqrt{5}-2$，故此说法正确，故答案为√.

③$\because$ 该矩形是黄金矩形，

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore b=\dfrac{2a}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a.$

$\because$ 矩形的外接圆半径为 R，

$\therefore$ 矩形的对角线长为 $2R$.

根据勾股定理得 $(2R)^2=a^2+b^2$，

即 $4R^2=a^2+\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a\right)^2$，

整理得 $R^2=\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}a^2$，故此说法正确，故答案为√.

(2)①【证明】$\because$ 在矩形 $ECDG$ 中，$EG/\!/CD$，

$\therefore \angle HED=\angle EDC.$

根据折叠可知 $\angle HDE=\angle EDC$，

$\therefore \angle HED=\angle HDE$，

$\therefore HE=HD.$

②【解】$\because$ 矩形 $ECDG$ 中，$\dfrac{EC}{CD}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore$ 设 $EC=GD=(\sqrt{5}-1)m$，则 $CD=EG=2m.$

设 $HE=HD=n$，则 $GH=2m-n.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle HGD$ 中，由勾股定理，可知 $GH^2+GD^2=HD^2$，

$\therefore (2m-n)^2+[(\sqrt{5}-1)m]^2=n^2.$

$\because m\neq0, n\neq0$，

$\therefore \dfrac{m}{n}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle HGD$ 中，$\cos\angle GHD=\dfrac{GH}{HD}=\dfrac{2m-n}{n}=\dfrac{2m}{n}-1=\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

又$\because \angle EGD=\angle A=90^\circ$，

$\therefore HG/\!/BA$，

$\therefore \angle ABD=\angle GHD$，

$\therefore \cos\angle ABD=\cos\angle GHD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

(3)【解】$\because$ 四边形 $EFGH$ 为矩形，$AD\perp BC$，

$\therefore EH/\!/BC$，$\angle FEH=\angle EFG=90^\circ$，

$\therefore \triangle AEH\backsim\triangle ABC$，$AP\perp EH$，

$\therefore \dfrac{AP}{AD}=\dfrac{EH}{BC}.$

$\because \angle PEF=\angle EFD=\angle PDF=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $EFDP$ 为矩形，

$\therefore PD=EF.$

$\because$ 矩形 $EFGH$ 是黄金矩形$(EF<EH)$，

$\therefore \dfrac{EF}{EH}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore$ 设 $EF=(\sqrt{5}-1)y$，则 $EH=2y$，

$\therefore PD=EF=(\sqrt{5}-1)y$，

$\therefore AP=AD-PD=2-(\sqrt{5}-1)y$，

$\therefore \dfrac{2-(\sqrt{5}-1)y}{2}=\dfrac{2y}{\sqrt{5}+1}$，

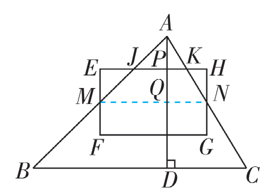
$\therefore y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，

$\therefore AP=2-(\sqrt{5}-1)\times\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}=1$，

$EH=2y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，

$\therefore PD=2-1=1$，$\therefore EF=1.$

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，如图(1)所示，设 EH 分别与 AB，AC 交于点 J，K，EF 与 AB 交于点 M，HG 与 AC 交于点 N，连接 MN 交 AD 于 Q，则 $AP=1-t$，$MF=1-t$，$ME=t.$



图(1)

根据题意可知 $JK/\!/MN$，

$\therefore \triangle AJK\backsim\triangle AMN$，$AQ\perp MN$，

$\therefore \dfrac{AP}{AQ}=\dfrac{JK}{MN}$，

即 $\dfrac{1-t}{1}=\dfrac{JK}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$，

解得 $JK=\dfrac{(\sqrt{5}+1)(1-t)}{2}$，

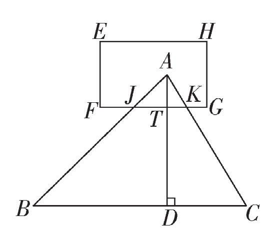
$\therefore S=S_{矩形MFGN}+S_{梯形JMNK}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\times(1-t)+\dfrac{1}{2}\times\left[\dfrac{(\sqrt{5}+1)(1-t)}{2}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right]t$

$=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}t^2+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.$

当 $1<t\leqslant 2$ 时，如图(2)所示，设 FG 分别与 AB，AC 交于点 J，K，AD 与 FG 交于点 T，

则 $AT=2-t.$



图(2)

根据题意可知 $JK/\!/BC.$

$\because AD\perp BC$，

$\therefore AT\perp JK.$

$\because JK/\!/BC$，

$\therefore \triangle AJK\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{AT}{AD}=\dfrac{JK}{BC}$，

$\therefore \dfrac{2-t}{2}=\dfrac{JK}{\sqrt{5}+1}$，

$\therefore JK=\dfrac{(2-t)(\sqrt{5}+1)}{2}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}\times\frac{(2-t)(\sqrt{5}+1)}{2}\times(2-t)$

$=\frac{(2-t)^2(\sqrt{5}+1)}{4}$

$=\frac{(4-4t+t^2)(\sqrt{5}+1)}{4}$

$=\frac{\sqrt{5}+1}{4}t^2-(\sqrt{5}+1)t+\sqrt{5}+1.$

综上可知，$S=\begin{cases}-\frac{\sqrt{5}+1}{4}t^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}(0\leqslant t\leqslant 1),\\ \frac{\sqrt{5}+1}{4}t^2-(\sqrt{5}+1)t+\sqrt{5}+1(1<t\leqslant 2).\end{cases}$

C 检测验收练

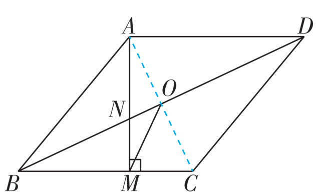
刷速度

1. B 【解析】$\because \angle CBE=42^\circ,\angle DAB=\angle DCB=42^\circ,\therefore \angle CBE=\angle DAB,\angle CBE=\angle DCB,\therefore AD/\!/BC,AB/\!/CD,\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故嘉嘉对. 根据 $\angle CBE=42^\circ,\angle ADC=138^\circ$，不能得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故淇淇不对. 故选 B.

2. C 【解析】$\because AB/\!/CF/\!/DE,\therefore \angle B+\angle BCF=180^\circ,\angle D+\angle DCF=180^\circ.\because \angle B=\angle D=140^\circ,\therefore \angle BCF=40^\circ,\angle DCF=40^\circ,\therefore \angle BCD=\angle BCF+\angle DCF=40^\circ+40^\circ=80^\circ$，故选 C.

3. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD/\!/BC,AB/\!/CD,\therefore \angle EAF=\angle AEB.\because AE$ 平分 $\angle BAD,\therefore \angle BAE=\angle EAF=\angle AEB,\therefore AB=BE.\because EF/\!/AB,AF/\!/BE,\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形. $\because BA=BE,\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形，$\therefore AF=EF.\because EF/\!/AB/\!/CD,DF/\!/EC,\therefore$ 四边形 $CDFE$ 是平行四边形. 要使平行四边形 $CDFE$ 是菱形，则 $DF=EF,\therefore AF=FD=CD,\therefore AD=2CD$，故选 C.

4. C 【解析】连接 AC，如图.



$\because$ 菱形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 互相垂直平分，点 O 是 BD 的中点，

$\therefore A,O,C$ 三点在同一直线上，$\therefore OA=OC.$

$\because OM=2,AM\perp BC,$

$\therefore OA=OC=OM=2,\therefore AC=4.$

$\because BD=8,\therefore OB=OD=\frac{1}{2}BD=4,$

$\therefore BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5},\tan\angle OBC=\frac{OC}{OB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

$\because \angle ACM+\angle MAC=90^\circ,\angle ACM+\angle OBC=90^\circ,$

$\therefore \angle MAC=\angle OBC,$

$\therefore \sin\angle MAC=\sin\angle OBC,\therefore \frac{CM}{AC}=\frac{OC}{BC}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$

$\therefore MC=\frac{4\sqrt{5}}{5},\therefore BM=BC-MC=2\sqrt{5}-\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{6\sqrt{5}}{5},$

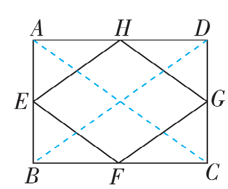
$\therefore MN=BM\cdot\tan\angle OBC=\frac{6\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，故选 C.

5. D 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD/\!/BC,AD=BC.$ 根据平行线间的距离相等可知点 B 和点 C 到 AD 的距离相等. $\because S_{\triangle ABE}=S_{\triangle DCE},\therefore AE=DE,\therefore$ 点 E 是 AD 的中点，故①正确. $\because F$ 是边 BC 的中点，$\therefore BF=FC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=AE.$ $\because AD/\!/BC,\therefore \angle EAC=\angle FCH,\angle AEH=\angle CFH$，四边形 $AEFB$ 是平行四边形，$\therefore \triangle AEH\cong\triangle CFH(\text{ASA}),AB=EF,\therefore HA=HC,EH=FH=\frac{1}{2}EF,\therefore FH=\frac{1}{2}AB$，故②③正确. $\because AD/\!/BC,\therefore \triangle AEG\backsim\triangle CBG,\therefore \frac{AG}{GC}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2},\therefore AG=\frac{1}{3}AC,CG=\frac{2}{3}AC.$ $\because HC=\frac{1}{2}AC,\therefore GH=GC-HC=\frac{1}{6}AC,\therefore AG:GH:HC=2:1:3$，故④正确. 综上所述，正确的结论有 4 个. 故选 D.

6. 40° 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ADC=40^\circ,\therefore \angle B=\angle ADC=40^\circ.\because AE=AB,\therefore \angle E=\angle B=40^\circ$，即 $\angle E$ 的度数为 40°. 故答案为 40°.

7. 50° 【解析】$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，$\therefore \angle AFE=\angle BAF=\frac{(6-2)\times180^\circ}{6}=120^\circ.\because \angle EFG=20^\circ,\therefore \angle AFG=120^\circ-20^\circ=100^\circ.\because AH/\!/FG,\therefore \angle FAH=180^\circ-100^\circ=80^\circ,\therefore \angle BAI=120^\circ-80^\circ=40^\circ.\because BI\perp AH,\therefore \angle ABI=90^\circ-40^\circ=50^\circ$，故答案为 50°.

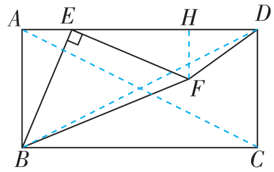
8. 16 【解析】如图，连接 $AC,BD.$ $\because$ 矩形 $ABCD$ 的对角线长为 8 cm，$\therefore AC=BD=8$ cm. $\because E,F,G,H$ 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点，$\therefore HG=EF=\frac{1}{2}AC=4$ cm，$EH=FG=\frac{1}{2}BD=4$ cm，



$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的周长等于 $4+4+4+4=16$ (cm)，故答案为 16.

9. $\frac{24}{7}$ 【解析】$\because DE/\!/BC,DF/\!/AC,\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形. $\because \angle C=90^\circ,\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是矩形. $\because CE=DE,\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是正方形. 设正方形 $CEDF$ 的边长为 x，则 $CE=DE=DF=FC=x.$ $\because BC=8,\therefore BF=8-x.$ $\because DF/\!/AC,\therefore \triangle CAB\backsim\triangle FDB,\therefore \frac{DF}{AC}=\frac{BF}{BC}.$ $\because AC=6,BC=8,\therefore \frac{x}{6}=\frac{8-x}{8}$，解得 $x=\frac{24}{7}$，$\therefore CF=\frac{24}{7}$. 故答案为 $\frac{24}{7}$.

10. $2\sqrt{5}$或 6 【解析】$\because$ $\triangle BEF$ 是等腰直角三角形，$\therefore$ $BE=EF$，$\angle BEF=90°$. 如图，连接 AC，BD，过点 F 作 $FH\perp AD$ 于 H，



$\therefore$ $\angle FHE=\angle BEF=90°=\angle BAE$，$\therefore$ $\angle ABE+\angle AEB=90°=\angle AEB+\angle FEH$，$\therefore$ $\angle ABE=\angle FEH$. 又$\because$ $BE=EF$，$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle HEF$(AAS)，$\therefore$ $AB=EH=6$，$AE=HF$. 设 $AE=HF=x$，$\therefore$ $DH=12-6-x=6-x$. 当点 F 在 BD 上时，$\tan\angle ADB=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{HF}{HD}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $\dfrac{x}{6-x}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $x=2$，$\therefore$ $HF=2$，$DH=4$，$\therefore$ $DF=\sqrt{HD^2+HF^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$；当点 F 在 AC 上时，$\tan\angle DAC=\dfrac{DC}{AD}=\dfrac{HF}{AH}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $\dfrac{x}{6+x}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $x=6$，$\therefore$ $HF=6$，易知此时点 F 与点 C 重合，点 H 与点 D 重合，$\therefore$ $DF=6$. 故答案为 $2\sqrt{5}$或 6.

11. (1)【证明】$\because$ 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是 BC 的中点，

$\therefore$ $AD\perp BC$，即$\angle ADC=\angle ADB=90°$.

$\because$ $CE/\!/AD$，$\therefore$ $\angle ECD=\angle ADB=90°$.

$\because$ $AE\perp AD$，$\therefore$ $\angle EAD=90°$，$\therefore$ $\angle ADC=\angle ECD=\angle EAD=90°$，$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形.

(2)【解】$\because$ D 是 BC 的中点，$BC=4$，$\therefore$ $BD=CD=\dfrac{1}{2}BC=2$.

由(1)可知四边形 $ADCE$ 是矩形，

$\therefore$ $AE=CD=2$，$\angle AEC=90°$.

在 Rt$\triangle AEC$ 中，$AE=2$，$CE=3$，由勾股定理得 $AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{13}$.

$\because$ $EF\perp AC$，

$\therefore$ $S_{\triangle AEC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot EF=\dfrac{1}{2}AE\cdot CE$，$\therefore$ $EF=\dfrac{AE\cdot CE}{AC}=\dfrac{2\times3}{\sqrt{13}}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.

12. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore$ $OC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}BD=OD$，

$\therefore$ $\angle OCD=\angle BDC$. $\because$ $\angle CDM=\angle BDC=\angle DCM$，$\therefore$ $\angle CDM=\angle BDC=\angle DCM=\angle OCD$，

$\therefore$ $OC/\!/DM$，$OD/\!/CM$，$\therefore$ 四边形 $CMDO$ 是平行四边形.

又$\because$ $OC=OD$，$\therefore$ 四边形 $CMDO$ 是菱形.

(2)【解】由(1)可知四边形 $CMDO$ 是菱形，$\therefore$ $OC=OD=MD=4$.

$\because$ $\angle CDM=\angle BDC$，$\angle ODM=120°$，$\therefore$ $\angle CDM=\angle BDC=60°$.

$\because$ $OC=OD$，$\therefore$ $\triangle COD$ 是等边三角形，$\therefore$ $CD=OC=OD=4$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore$ $\angle BCD=90°$，$BD=2OD=2\times4=8$，

$\therefore$ $BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$，

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积为 $CD\cdot BC=4\times4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$.

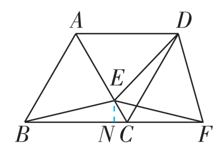
13. (1)【证明】设 CD 与 EF 相交于点 M.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，$\therefore$ $BC=DC$，$\angle BCE=\angle DCE$，$AB/\!/CD$. $\because$ $\angle ABC=60°$，$\therefore$ $\angle DCF=60°$. 在$\triangle BCE$ 和$\triangle DCE$ 中，

$$\begin{cases}BC=DC,\\ \angle BCE=\angle DCE,\\ CE=CE,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle BCE\cong\triangle DCE$(SAS)，$\therefore$ $\angle CBE=\angle CDE$，$BE=DE$. $\because$ $\angle DMF=\angle DEF+\angle CDE=\angle DCF+\angle CFE$，$\angle DEF=\angle DCF=60°$，$\therefore$ $\angle CDE=\angle CFE$，$\therefore$ $\angle CBE=\angle CFE$，$\therefore$ $BE=EF$.

(2)【解】过点 E 作 $EN\perp BC$ 于 N，如图，



则$\angle ENC=90°$. $\because$ $BE=EF$，

$\therefore$ $BF=2BN$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=60°$，

$\therefore$ $BC=AB=10$ cm，$\angle BCD=120°$，

$\therefore$ $\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle BCD=60°$，即$\angle ECN=60°$，$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore$ $AC=AB=10$ cm.

$\because$ $CE=2x$ cm，$\therefore$ $EN=CE\cdot\sin 60°=2x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}x$(cm)，

$CN=CE\cdot\cos 60°=2x\cdot\dfrac{1}{2}=x$(cm)，

$\therefore$ $BN=BC-CN=(10-x)$ cm，$\therefore$ $BF=2(10-x)$ cm，

$\therefore$ $y=\dfrac{1}{2}BF\cdot EN=\dfrac{1}{2}\times2(10-x)\times\sqrt{3}x=-\sqrt{3}x^2+10\sqrt{3}x$.

$\because$ $0<2x\leqslant10$，$\therefore$ $0<x\leqslant5$，

$\therefore$ $y=-\sqrt{3}x^2+10\sqrt{3}x(0<x\leqslant5)$.

(3)【解】$\because$ $BE=DE$，$BE=EF$，$\therefore$ $DE=EF$.

$\because$ $\angle DEF=60°$，$\therefore$ $\triangle DEF$ 为等边三角形，

$\therefore$ $DE=DF=EF$，$\therefore$ $BE=DF$，

$\therefore$ 线段 DF 的长度最短，即 BE 的长度最短，当 $BE\perp AC$ 时，BE 最短.

$\because$ $\triangle ABC$ 为等边三角形，$AC=10$ cm，

$BE\perp AC$，$\therefore$ $CE=\dfrac{1}{2}AC=5$ cm，$\therefore$ $x=\dfrac{5}{2}$，

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{5}{2}$时，线段 DF 的长度最短.

14.【解】(1)①$\because$ $AB=AD$，$\therefore$ 点 A 在 BD 的垂直平分线上.

$\because$ $BC=CD$，$\therefore$ 点 C 在 BD 的垂直平分线上，$\therefore$ AC 垂直平分 BD，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是“垂美四边形”，故答案为是.

②四边形 $BCGE$ 是“垂美四边形”. 理由如下：

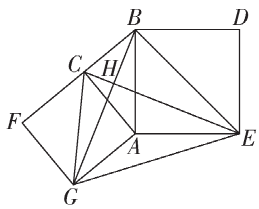
如图(1)，设 CE 与 BG 交于点 H.

$\because$ 分别以 Rt$\triangle ACB$ 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正

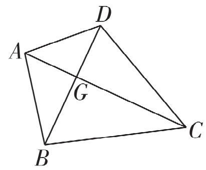
方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，$\therefore BA=EA, AG=AC, \angle EAB=\angle CAG=90°$，$\therefore \angle CAE=\angle GAB=90°+\angle BAC$，$\therefore \triangle ACE \cong \triangle AGB$（SAS），$\therefore \angle AEC=\angle ABG$，$\therefore \angle HEB+\angle HBE=\angle HEB+\angle ABE+\angle ABG=\angle HEB+\angle ABE+\angle AEC=90°$，

$\therefore \angle BHE=90°$，$\therefore CE\perp BG$，

$\therefore$ 四边形 $BCGE$ 是“垂美四边形”.



图(1)



图(2)

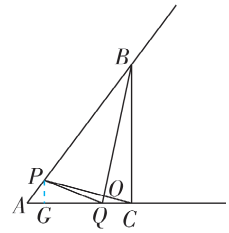
(2) $DC^2+AB^2=AD^2+BC^2$. 理由如下：

如图(2)，设 AC 与 BD 交于点 G.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是“垂美四边形”，$\therefore AC\perp BD$，$\therefore DC^2=GD^2+CG^2, AD^2=GD^2+GA^2, AB^2=BG^2+GA^2, BC^2=GC^2+GB^2$.

$\because DC^2+AB^2=GD^2+CG^2+BG^2+GA^2, AD^2+BC^2=GD^2+GA^2+GC^2+GB^2$，$\therefore DC^2+AB^2=AD^2+BC^2$.

(3) t 的值是 $\frac{1}{9}$ 或 $\frac{9}{7}$. 如图(3)，作 $PG\perp AC$ 于点 G，则 $\angle AGP=\angle CGP=90°$.



图(3)

$\because \angle ACB=90°, AC=3, BC=4$，

$\therefore BA=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$.

$\because \angle AGP=\angle ACB=90°, \angle A=\angle A$，$\therefore \triangle APG\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{AP}{AB}=\frac{AG}{AC}=\frac{PG}{BC}$，$\therefore \frac{AP}{5}=\frac{AG}{3}=\frac{PG}{4}$. $\because AP=5t, AQ=21t$，$\therefore AG=\frac{3}{5}AP=\frac{3}{5}\times 5t=3t, PG=\frac{4}{5}AP=\frac{4}{5}\times 5t=4t, CQ=|3-21t|$，

$\therefore GQ=AQ-AG=21t-3t=18t, BP=|5-5t|$，$\therefore PQ^2=PG^2+GQ^2=(4t)^2+(18t)^2$. $\because$ 以点 B,C,P,Q 为顶点的四边形是“垂美四边形”，$\therefore$ 结合题意可知，只存在 $BQ\perp CP$ 这一种情况. 由(2)得 $PQ^2+BC^2=PB^2+CQ^2$，$\therefore (4t)^2+(18t)^2+4^2=(5-5t)^2+(3-21t)^2$，整理得 $63t^2-88t+9=0$，解得 $t=\frac{1}{9}$ 或 $t=\frac{9}{7}$，

$\therefore t$ 的值是 $\frac{1}{9}$ 或 $\frac{9}{7}$.

第六章　圆

A 湖南真题诊断练

刷 诊断

1. C 【解析】根据题意，得 $\angle A$ 和 $\angle BOC$ 分别是 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角和圆心角，$\therefore \angle A=\frac{1}{2}\angle BOC$. $\because \angle A=45°$，$\therefore \angle BOC=2\angle A=2\times45°=90°$. 故选 C.

2. B 【解析】$\because OE\perp AB$，$\therefore AE=EB=\frac{1}{2}AB=4$，$\therefore OA=\sqrt{AE^2+OE^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$. 故选 B.

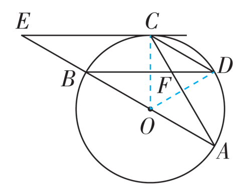
3. C 【解析】$\because \angle AOB=40°, \angle OCA=30°$，$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=20°$，$\therefore \angle BCO=\angle OCA+\angle ACB=30°+20°=50°$. 故选 C.

4. C 【解析】由题意得，$\angle AOB=\angle AOC-\angle BOC=25°$，$\therefore$ 劣弧 AB 的长为 $\frac{25\pi\times R}{180}=\frac{5\pi}{36}R$（千米）. 故选 C.

5. 4π 【解析】扇形的面积为 $\frac{90\pi\times4^2}{360}=4\pi$. 故答案为 4π.

6. 6 【解析】$\because AB=OA, OA=OB$，$\therefore AB=OA=OB$，$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，$\therefore \angle OAC=60°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，$\because AC=3$，$\therefore OA=\frac{AC}{\cos 60°}=6$，故答案为 6.

7. (1) 2π　(2) $\frac{1}{2}$ 【解析】(1) 如图，连接 OC, OD. $\because$ 点 C 为 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，



$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$. 又 $\because \angle A=30°$，$\therefore \angle BOC=\angle COD=2\angle A=60°$，$\therefore \angle BOD=120°$. $\because AB=6$，$\therefore OB=\frac{1}{2}AB=3$，$\therefore l_{\overset{\frown}{BD}}=\frac{120}{180}\times\pi\times3=2\pi$，故答案为 2π.

(2) $\because$ 点 C 为 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore OC\perp BD$.

$\because EC$ 是 $\odot O$ 的切线，C 为切点，$\therefore OC\perp EC$，$\therefore EC\parallel BD$，

$\therefore \frac{CF}{AF}=\frac{EB}{AB}$.

$\because \frac{CF}{AF}=\frac{1}{3}$，$\therefore \frac{EB}{AB}=\frac{1}{3}$.

设 $EB=2a$，则 $AB=6a, BO=CO=3a$，$\therefore EO=EB+BO=5a$，

$\therefore EC=\sqrt{EO^2-CO^2}=\sqrt{(5a)^2-(3a)^2}=4a, AE=EB+AB=2a+6a=8a$，

$\therefore \frac{CE}{AE}=\frac{4a}{8a}=\frac{1}{2}$. 故答案为 $\frac{1}{2}$.